



حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وەزارەتی پەرەدرە - پڕۆژەبەرایەتی گشتی پڕۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بو هەمووان

کتیبي راهیان
پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی شەشەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

1	ويّنه پروونكرندنه وه بيه كان و نمونه هيلّيه كان Graphs and Linear Models	به شى يه كه م
4	دهروازه يه ك بو هه ژمار كرنى جياكارى و ته واو كارى Introduction to Calculus	به شى دوو دم
9	داتاشراو و نمونه ي ليكه وت Derivative and the Tangent Problem	به شى سييه م
13	جي به جي كرنى داتاشراو Applications of Differentiation	به شى چواره م
18	ته واو كارى بيسنور Indefinite Integral	به شى پينجه م
22	برگه قوچه كييه كان Conics Sections	به شى شه شه م
25	ژماره ئاو يته كان و ئه ندازه Complex Numbers And Geometry	به شى حه فته م

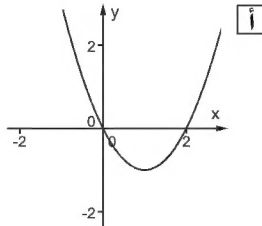
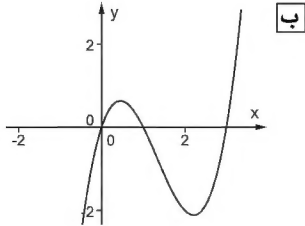
بۇ خويندكار

كتىبى راھىنان دارىژراوۋە بۇ ئەۋەى راھىنانى زىادە بۇ خويندكار پەيدا بىكات، پەيوەستە بەۋ
كارامەيىنانەى لەھەر وانەيەكدا فىرى بوۋە. ئەۋ كىتەپە پىكھاتوۋە لە بەشەك بۇ ھەر وانەيەك.
ۋ ھەر راھىنانىك لەۋ بەشانەى كارامەيى وجىبەجىكرىدىان دەگرىتەۋە، كە خويندكار لەۋ وانەيەدا
فىرى بوۋە.

ئەو ڤوونکردنە وەبە دياربکە کە بۆ نەخشەى راھبەتەکان دەگەرێتە وە.

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \quad 1$$

$$f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 1 \quad 2$$



ڤوونکردنە وەبە نەخشەکە بە خاڵ بکێشە.

$$f(x) = 4 - x^2 \quad 3$$

$$f(x) = |x| - 1 \quad 4$$

یەکتەرپرینە ئاسۆییەکان و ستوونیەکانی ڤوونکردنە وەبە نەخشەکە بکێشە.

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1} \quad 5$$

$$f(x) = \frac{3(2-\sqrt{x})}{x} \quad 6$$

دياربکە ئەگەر نەخشەکە تاکە یان جووتە، یان هیچیان نییە؟

$$f(x) = x^3 - 4x \quad 7$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x} \quad 8$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad 9$$

خاڵەکانی یەکتەرپرینی ڤوونکردنە وەبە دوو نەخشەکە بدۆزە وە:

$$g(x) = 1 - x^2 \text{ و } f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad 10$$

$$g(x) = 6 - x \text{ و } f(x) = -|2x - 3| + 6 \quad 11$$

ويئنه راسته هيلكه بكيشه كه لاري و نهو خاله ي پياندا دهروات دراوه.

- 1 3 ؛ $(-2, 1)$ 2 0 ؛ $(3, 5)$ 3 پيناسه نهكراوه ؛ $(2, \frac{5}{4})$

هاوكيشه ي نهو راسته هيلكه كه به دوو خاله دياريكراوه كه دا دهروات بدوزهوه.

- 4 $(1, 2)$ و $(4, 3)$ 5 $(-2, 4)$ و $(-2, -4)$

هاوكيشه ي نهو راسته هيلكه كه به خاله دراوه كه دادهروات به راسته هيلكه دراوه كه تهره به بدوزهوه.

- 6 $(1, 2)$ ؛ $2x - 3y = 1$ 7 $(-5, 3)$ ؛ $x = 1$

هاوكيشه ي نهو راسته هيلكه كه به خاله دراوه كه دادهروات و لهسه راسته هيلكه دراوه كه نهستونه بدوزهوه.

- 8 $(-2, 3)$ ؛ $4x - 5y = 3$ 9 $(3, 1)$ ؛ $y = -2$

دووري نيوان خالي d و راسته هيلكه M بدوزهوه.

- 10 $M(4, 5)$ ؛ $d : 4x + 3y = 4$ 11 $M(1, 3)$ ؛ $d : y = 2x - 1$

12 كۆمپانيه كه دوو درخسته ي پيشكهش به فرمانبريكي نوئ كرد، بۆ نهوه ي يهكيان هلبژيرت. له درخسته ي يهكه م 6500 دينار بهرامبه هر كاتزميريكي كار وهردهگريت، لهگه ل 500 دينار بۆ هر يهكه يهكي بهرهم. له درخسته ي دووهم 5100 دينار وهردهگريت بهرامبه هر كاتزميريكي كار لهگه ل 700 دينار بۆ هر يهكه يهكي بهرهم.

ا) هاوكيشه يهكي هيل بۆ هر درخسته يهك بنوسه، كه كريهكه به كاتزمير w بهپي ژماره ي يهكهكاني بهرهمهينراو له كاتزميريك x بنوينت.

ب) هر دوو هاوكيشه كه له ههمان پوتهختي پوتانهكان بنوينه، و پوتاني خالي يهكترپيني دوو پونكردنهوهكه بدوزهوه.

ج) خالي يهكترپينهكه ي لقي ب چي دنوينت؟

چۆن ئەم زانباريانە بەکار دەهێنیت، بۆ ئەوەی درخستە ی گونجاو بۆ فرمانبەرەكه هلبژيرت؟

به‌های داواکراوه‌کانی نەخشەکه ئەگەرکرا هه‌ژمار بکه، ئەنجامه‌کان به سادەترین شیوه بنووسه.

$$1 \quad h \geq -\frac{1}{2} \quad f(1+h), f(5), f\left(\frac{5}{2}\right), f(1), f(x) = \sqrt{2x-1}$$

$$2 \quad \frac{f(2+\sqrt{x})-f(2)}{\sqrt{x}}, f(\sqrt{2}), f(1), f(-1), f(x) = x^3 - 2x^2$$

$$3 \quad f\left(\frac{5\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(-\frac{\pi}{3}\right), f(0), f(x) = \sin 2x$$

$$4 \quad f(-1), f(2), f(0), f(1), f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

بوارو مه‌ودای هه‌ر نەخشەیه‌که دیاریکه.

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad 6 \quad f(x) = \frac{2}{|x-1|}$$

$$7 \quad \text{به‌های } (2) (f \circ g) \text{ بدۆزه‌وه کاتیکی } f(x) = x^2 + 1 \text{ و } g(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$8 \quad \text{پوونکردنەوه‌ی نەخشە‌ی بنه‌په‌تی } f(x) = |x| \text{ بۆ وینه‌کیشانی پوونکردنەوه‌ی هه‌ریه‌که له‌م نەخشانه به‌کاربه‌ینه.}$$

$$9 \quad \text{سی نەخشە‌ی وه‌ک } f, g, h \text{ بدۆزه‌وه بۆ ئەوه‌ی نەخشە‌ی } k = f \circ g \circ h \text{ نەخشە‌ی } k(x) = 2 \sin(3x) \text{ پیکبه‌ینیت.}$$

$$10 \quad \text{دیاریکه ئەگەر نەخشە‌ی } f \text{ جووته یان تاکه.}$$

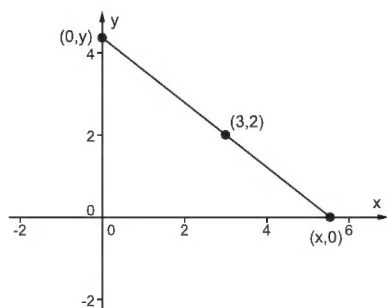
$$11 \quad \text{ئەو جیگۆرکی یه‌ک له دوايه‌کانه دیاریبه‌که که پوونکردنەوه‌ی نەخشە‌ی } f(x) = x^3 \text{ بۆ پوونکردنەوه‌ی هه‌ر نەخشەیه‌که ده‌گۆریت}$$

$$12 \quad \text{وینه به‌رامبه‌ر سیگۆشه‌یه‌کی وه‌ستاو له چاریکی یه‌که‌م له پووته‌ختی پۆتانه‌کان که}$$

له‌گه‌ل دوو ته‌وه‌ری پۆتانه‌کان و راسته‌هێلێک به‌ خالی (3, 2) دا ده‌روات پیکدیت پوونده‌کاته‌وه، درێژی ژێی سیگۆشه‌که وه‌ک نەخشەیه‌که به‌پێی x بنووسه.

$$13 \quad \text{پوونیکه‌وه ئەنجامی لیکدانی دوو نەخشە‌ی تاک، نەخشەیه‌کی جووته؟}$$

$$14 \quad \text{ئەنجامی لیکدانی نەخشەیه‌کی تاک و نەخشە‌کی جووت، بریتیه‌ له نەخشەیه‌کی تاک.}$$



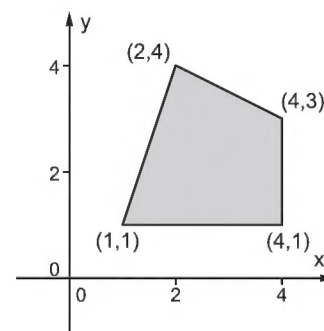
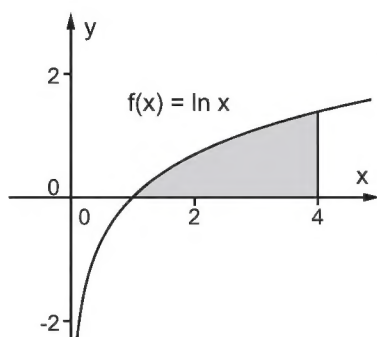
Introduction to calculus د هروازیهک بۆ ههژمارکردنی جیاکاری و تهواوکاری

له راهیښانی 1 و 3 دا، ئهگەر کرا شیکاری راهیښانهکه بکه، بۆ پنهابردن بۆ چه مکی نامانچ و شیکارکردنی و بۆچوونی خۆت پروونبکهوه ئهگەر په نات بۆ چه مکی نامانچ برد، پاشان پښگای ژمارهیی یا پروونکردنهوهیی بۆ خهملاندنی وهلامهکته بهکار بهیښه.

1 ئه و دوریهی ته نه جوولاهه که له ماوهی 20 چرکه دا دهیپریت بدۆزه وه، ئهگەر ته نه که به خیراییهکی نهگۆر بره که ی 8m/s بجوولیت.

2 خالیک له سه ر پروونکردنه وهی نه خشه ی $f(x) = 0.2x^2 + x$ دهجوولیت، کاتی که x به ره و پښچوونی ئاسو یی خاله که بیت و $f(x)$ به رزبونه وهی به رامبه ر دنو ینیت. تیکرای گۆرانی به رزی خاله که له $x = 3$ بدۆزه وه.

له راهیښانی 3 و 4 دا، پرووبه ری ناوچه سیبه ر کراوه که به به کاره یښانی لاکیشه کان بدۆزه وه.



5 نه خشه ی $f(x) = x^2 - 2x$ و خالی $P(1, -1)$ که ده که و یتته سه ر پروونکردنه وه که ی به کار به یښه.

ا و ینه ی پروونکردنه وهی نه خشه که و ئه و بره رانه ی به خالی P و خاله کانی $(x, f(x))$ دا ده روات بکیشه کاتی که x ئه م به هایانه وهر ده گری ت 2، 1.5، 1.2.

ب لاری هه ریه که له و بره رانه بدۆزه وه.

ج ئه نجامه کانی لقی ب بۆ خه ملاندنی لاری لیکه وتی نه خشه ی f له خالی P به کار به یښه. ئینجا باسی به که چۆن لاری بره ره که له لاری لیکه وته که نزیک و نزیکتر ده که یه وه.

6 نه خشه ی $f(x) = \sqrt{x}$ و خالی $P(4, 2)$ که ده که و یتته سه ر پروونکردنه وه که ی به کار به یښه.

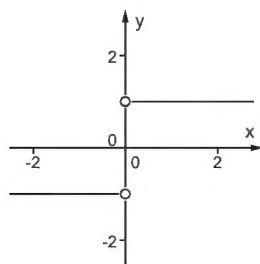
ا و ینه ی نه خشه که و ئه و بره رانه ی به خالی P و خاله کانی $(x, f(x))$ دا ده روات بکیشه کاتی که x ئه م به هایانه وهر ده گری ت 1، 3، 5.

ب لاری هه ریه که له و بره رانه بدۆزه وه، ئینجا به های نزیکه یی لاری لیکه وتی پروونکردنه وهی نه خشه که له خالی P دا بدۆزه وه.

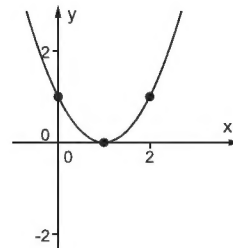
دۆزینه وهی ئامانجهكان به پوونكردنه وهی و ژماره یی

Finding Limits Graphically and Numerically

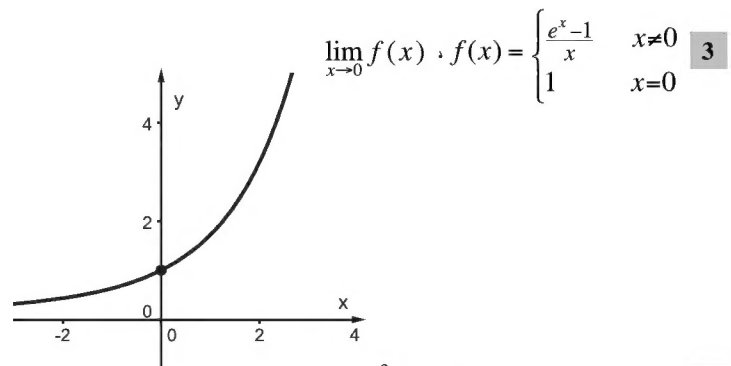
ئامانج به پوونكردنه وهی (ئه گهر هه بیټ) بدۆزه وه، ئه گهر نا به لگه بۆ نه بوونی ئامانجه كه بهیته وه.



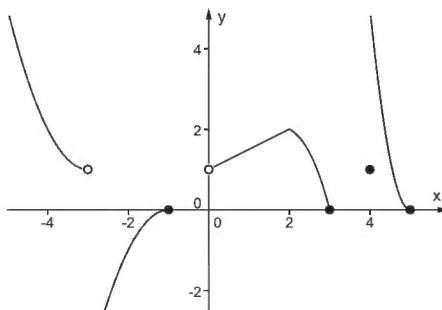
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^2 = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0$$

5 وینه پوونكردنه وهییه كه به كار بهیته بۆ بریاردان له هه بوونی به هایه ك، ئه گهر به هایه كه زانراو بیټ به هایه كی نزیکه یی بۆی دیاریكه، ئه گهر نا به لگه بهیته به نه بوونی ئامانجه كان.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \boxed{\text{ب}}$$

$$f(-2) = \boxed{\text{ا}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \boxed{\text{د}}$$

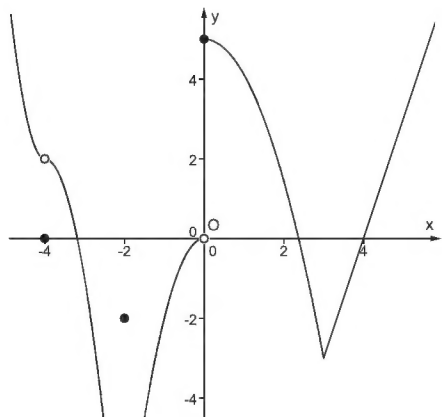
$$f(-3) = \boxed{\text{ج}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{\text{و}}$$

$$f(2) = \boxed{\text{ه}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \boxed{\text{ح}}$$

$$f(4) = \boxed{\text{ز}}$$



6 پوونكردنه وهی نه خشی f به كار بهیته و به هاكانی c دیاریبكه، له كاتی نه بوونی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$

7 پوونكردنه وهی نه خشی f بكپشه كه مه رجه كانی خواره وه جیبه جی ده كات. • $f(0)$ نییه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$$

$$f(2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

لە راھبەتانی 1-7 ، ئامانجی داواکراو بدۆزەوه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x} \quad 7$$

لە راھبەتانی 8 و 9 دا، سەلمبەتاروی دوو مەرج بۆ دۆزینە وە $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بەکار بهێتە.

$$3 + 2x - x^2 \leq f(x) \leq 3 + 2x + x^2, \quad c = 0 \quad 8$$

$$x - |x - 1| \leq f(x) \leq x + |x - 1|, \quad c = 1 \quad 9$$

10 نەخشەی f و g بدۆزەوه کە ئەمانە پاسادان دەکەن: ئەم دوو ئامانجە $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ نەبێت، بەلام $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$ هەبێت.

11 نەخشەی $s(t) = -4.9t^2 + 200$ لادانی بەردیك له بەرزى 200m پاش t چرکە لە کەوتنی دەنویئێت. ئامانجی $\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$ بریتییە لە خێرای تەنەکە لە $t = a$.

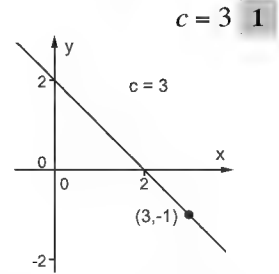
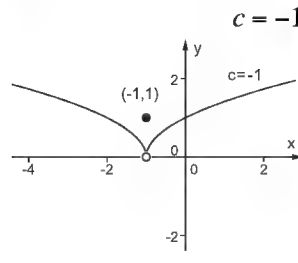
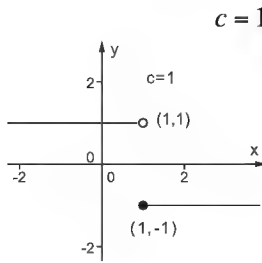
أ خێرای بەردەکە لە $t = 2$ بدۆزەوه.

ب خێرای بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بە زەوی دەبێتە چەند؟

12 ا پوونبیکەوه کە $-|a| \leq a \leq |a|$ ژمارەى راستى a هەرچەندبێت.

ب پوونبیکەوه، ئەگەر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ئەوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$.

له پرايئنانى 1 تا 3 ، وینه پروونکردنهوهکه بهکاربهیئنه، بۆ دیاریکردنى ئامانجى نەخشەکه کاتیك x له لای راست و له لای چهپی c نزیكدهبیتهوه. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (ئەگەر هەبێت) بدۆزهوه پاشان بەردهوامى نەخشەکه له $x = c$ تاوتویکە.



له پرايئنانى 4 تا 6، بەردهوامى نەخشەکه تاوتویکە.

6 $f(x) = \frac{|x+1|-|x|}{x}$

5 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

4 $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

له پرايئنانى 7 و 8 دا، بهای x (ئەگەر هەبێت) که نەخشەکه تیايدا پچراوه بدۆزهوه و دیاریکە ئەگەر پچرانەکەى لابردنى له توانادایه.

8 $f(x) = \frac{e^x-2}{x-1}$

7 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

9 بهای a و b دیاریکە بۆ ئەوهى نەخشەکه خالى پچرانى نهبێت.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ ax+3 & 1 < x \leq 4 \\ bx+1 & x > 4 \end{cases}$$

10 بۆچی نەخشەکه له نۆوان a و b دا ڤهگى ههیه؟

$b = 1, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

11 قسهکردنهكان: تێچوونى قسهکردن له نۆوان ههولێر و دهروهه بهم شێوهیه ههژماردهكرێت: 1040 دینار بۆ دوو خولهكى يهكهم، 360 دینار بۆ ههر خولهكێك یان بهشێك له خولهكى زیاده، نەخشەى تهواوى $[x]$ گهورهترین ژمارهى تهواو له x زیاتر نییه) بهکاربهیئنه بۆ نووسینی تێچوونى قسهکردن بهپێى کاتهکەى t به خولهکهكان. پروونکردنهوهى ئەم نەخشە بکێشه و بەردهوامیهکەى تاوتویکە.

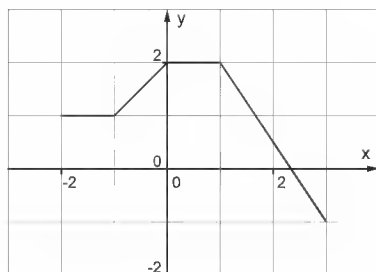
دەرکه ناره ستوونیه کان (ئەگەر هەبێت) بۆ روونکردنەوه یی نەخشەکان بدۆزەوه:

$f(x) = \frac{x}{\sin x}$ 3

$f(x) = \frac{2+x}{x^2(1-x)}$ 2

$f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ 1

ئەگەر نەخشەکە دەرکه ناری ستوونی هەیه، یان پچرانیك لابردنی له توانادا هەیه دیاریکە، له $x = -1$.



$f(x) = \frac{x^2-6x-7}{x+1}$ 4

$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ 5

6 روونکردنەوه ی نەخشە ی f بهرامبەر بۆ نووسینی هاوکیشە ی نەخشە ی $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ له ماوه ی $[-2, 3]$ به کاربهێنە.

لاری نهخشهکه له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

3 $(0, 1), f(x) = x^3 + 1$

2 $(1, \frac{2}{3}), f(x) = \frac{2x}{2+x}$

1 $(1, 2), f(x) = x^2 - 2x + 3$

داتاشراوی ههر نهخشهیهک بهبهکارهیتانی ئامانجهکان بدۆزهوه.

6 $f(x) = \sqrt{2x+3}$

5 $f(x) = \sin x$

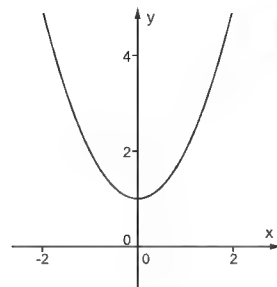
4 $f(x) = x^2 + x$

هاوکیشهی لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشهکه که تهریبه بهو راستههیلهی هاوکیشهکهی دیاریکراوه، بدۆزهوه.

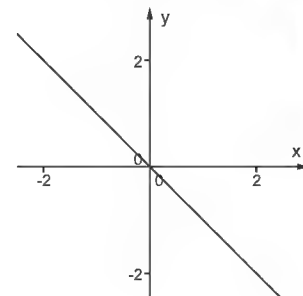
7 $2x - y + 2 = 0, f(x) = x^2 - 2x + 2$

8 $x - 4y + 5 = 0, f(x) = \sqrt{x+1}$

ئهگهر پروونکردنهوهی نهخشهی f ت ههیت. ئهوا پروونکردنهوهی داتاشراوهکهی بکیشه.



10



9

11 لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشهی h له خالی $(3, 1)$ دا به خالی $(1, 3)$ دهپوات. $h(3), h'(3)$ بدۆزهوه.

12 بههایهکانی x بدۆزهوه که نهخشهی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ توانای داتاشراوی نهیت.

دیاریبکه ئهگهر نهخشهکه له $x = 1$ توانای داتاشراوی ههیت

14 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$

13 $f(x) = |x-1|$

داتاشراوی نهخشهکه بدۆزهوه

$$f(x) = x^2 + xe^x \quad 3$$

$$f(x) = x^2 \sin x \quad 2$$

$$f(x) = x^2 + 4 - \frac{5}{x^2} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad 6$$

$$f(x) = \sqrt{1 + e^x} \quad 5$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad 4$$

$$f(x) = \tan \sqrt{x} \quad 8$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad 7$$

هاوکیښه لیکهوتی نهخشهکه له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

$$(3, 6), f(x) = x\sqrt{x+1} \quad 9$$

$$(0, 1), f(x) = x^2 e^x + 1 \quad 10$$

بۆ دیاریکردنی بههای $f'(1)$ پیدراوهکان بهکاربهێنه.

$$h'(1) = 3 \text{ و } h(1) = -2, \quad g'(1) = -1 \text{ و } g(1) = 1$$

$$f(x) = g(x^2) \times h(x) \quad 12$$

$$f(x) = 3g(x) - 2h(x) \quad 11$$

$$f(x) = h(g(x)) \quad 13$$

پیدراوهکان بۆ دیاریکردنی بههای $f'(0)$ بهکاربهێنه: $g(0) = 1$ و $g'(0) = -2$ و $h'(1) = 5$

$$f(x) = x^3 + kx^2 + c \quad 14$$

بههای C و K دیاریبکه بۆ ئهوهی نهخشهی له خالی $(1, 2)$ دا ههبیّت.

$$[t_0 - 4, t_0 + 4] \quad 15$$

خیرایی: بیسهلمینه که ناوهنده خیرایی تهنیکی جولاو له ماوهی

$$s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c \quad 16$$

ساتی له $t = t_0$, ئهگەر زانیت نهخشهی لادان بریتییه له

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad 16$$

هاوکیښه برپه هاوتای بدۆزهوه که به خالی $(0, 1)$ دا دهپوات

$$y = x - 1 \quad 17$$

و راستههیلای له خالی $(1, 0)$ دهبیته لیکهوتی.

داتاشراوی خوښه خو و داتاشراوه بهرزهکان

Implicit Defferentiation and Higher Derivative

y' بدوژهوه.

$x^2 + \ln y = e^y$ 3

$x = y + \sin y$ 2

$x^3 y + xy^2 = 2$ 1

y' و لاری چهماوهکه له خالی دیاریکراو بدوژهوه.

$(-1, 2): xy + x^2 + y^2 = 3$ 5

$(1, 1): 2x^2 + 5y^2 = 7$ 4

داتاشراوی دووهمی نهخشهکه بدوژهوه.

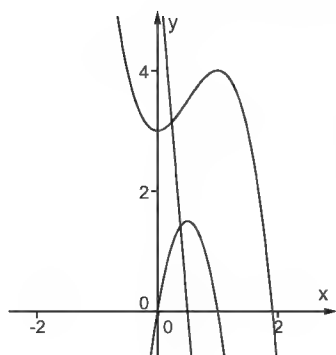
$f(x) = e^x + \ln^2 x$ 7

$f(x) = x + \sqrt{x+1}$ 6

داتاشراوی داواکرا بو نهو نهخشه یهکیک له داتاشراوهکانی دراوه بدوژهوه.

$f^{(6)}(x), f'''(x) = x^2 + e^x$ 9

$f^{(4)}(x), f''(x) = x \sin x$ 8



10 وینهی بهرامیهر، پوونکردنهوهی نهخشهی f و پوونکردنهوهی نهخشهی f' و f'' دهنوینیت، دیاریبکه کام لهم سی پوونکردنهوانه، پوونکردنهوهی نهخشهکهیه، کامیان پوونکردنهوهی f' و کامیان هی f'' دهنوینیت، باسی چوونیهتی دیاریکردنی ههرسی پوونکردنهوهکه بکه.

11 به دووباره نووسینهوهی نهخشهکه ئامانجی داواکراو بدوژهوه، پاشان ئامانجهکه به بهکارهینانی سهلمینراوی لوبیتال بدوژهوه.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}$ ج

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ ب

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ ا

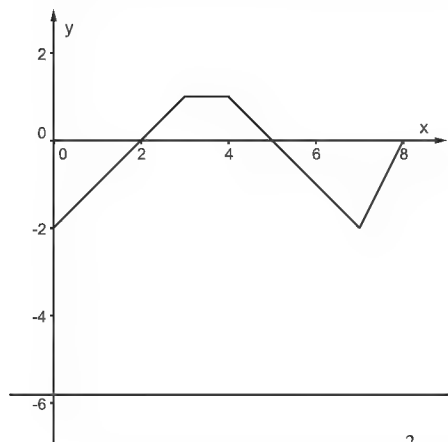
12 خالیک یان زیاتر دیاریبکه که تییدا لیکهوتی پوونکردنهوهی پهیهندی $y^4 = y^2 - x^2$ ئاسویی بیت.

13 ههموو خالهکانی سهر بازنهی $x^2 + y^2 = 25$ بدوژهوه کاتیک لاری لیکهوت پهکسانه به $\frac{3}{4}$.

14 نهو خالانه بدوژهوه که تییدا لاری پوونکردنهوهی هاوکیشهی $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ ئاسویی بیت.

1 درېژنی لاکېشه یه ک $(3t + 2)$ و پانییه که ی $(\sqrt{t+1})$ یه که پېوانه بیټ، تیکړای گۆرانی پووبه ری ئه و لاکېشه یه به گۆرانی t بدوژه وه.

2 لوله کیکی باز نه یی وه ستاو نیو ه تی ره ی بنکه که ی $(\sqrt{t+2})$ و به رزییه که ی $(\sqrt{2t+1})$ بیټ تیکړای گۆرانی قه باره ی ئه و لوله که به گۆرانی t بدوژه وه.



3 له ویننه ی بهرام بهر پوونکر دنه وه ی نه خشه ی $v = f(t)$ دهر ده که ویټ، که خیرایې ئاړاسته کړاوی خالیکی ته وه ری x دنوینټ.

- ا) که ی خاله که بؤ دواوه ده جوولټ؟ که می خاله که بؤ پېشه وه ده جوولټ؟ که ی خیراییه که ی زیاد ده کات؟ و که ی که م ده کات؟
ب) که ی تاودانی خالیک موجه ب یا سالب یا سفر ده بیټ؟
ج) که ی خالیک به ئه و په ری خیراییه که ی ده جوولټ؟
د) که ی خاله که له جووله ده وه ستیټ؟

4 بهر دیک له سهر پووی مانگ بؤ سهر وه ه لدر ا به خیرایې بنه پرتی 32 m/s نه خشه ی $s(t) = 32t - 0.8t^2$ نمونه یه ک بؤ دوزینه وه ی به رزی بهر ده که پاش t چرکه دنوینټ.

- ا) خیرایې بهر ده که وه ک نه خشه یه ک به پیی کات t بدوژه وه، هه روه ها تاودانه که ی وه ک نه خشه یه ک به پیی کات t بدوژه وه.
ب) پاش چهن د چرکه بهر ده که ده گاته ئه و په ری به رزییه که ی؟
ج) ئه و په ری به رزییه که ی ده کاته چهن د؟
د) که ی بهر ده که ده گاته به رزییه ک نیوه ی ئه و په ری به رزییه که ی بیټ؟
ه) چهن د چرکه بهر ده که له بؤ شایې (ئاسمان) ده مینټه وه؟

له راهیټنای 5 و 6 دا، وادابنی x و y دوو نه خشه ی به پیی t و توانای داتاشراویان هیه، داواکراوه که به پیی پیدراوه که بدوژه وه.

په یوه ندی نیوان x و y	داواکراو	پیدراو
$xy = 4$	له $\frac{dy}{dt}$ له $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
	له $\frac{dx}{dt}$ له $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
$2x^2 + 3y^2 = 5$	له $\frac{dy}{dt}$ له $x = 1$	$\frac{dx}{dt} = -2$
	له $\frac{dx}{dt}$ له $y = 1$	

7 نیوه تی ره ی باز نه یه ک 3 cm/s زیاد ده کات.

- ا) تیکړای گۆرانی چپوه ی باز نه که کاتیک $r = 9 \text{ cm}$ بدوژه وه.
ب) تیکړای گۆرانی پووبه ری باز نه که کاتیک $r = 6 \text{ cm}$ بدوژه وه.

8 تیکړای گۆرانی دووری نیوان خالیک له سهر پوونکر دنه وه ی نه خشه ی $y = x + \cos^2 x$ ده جوولټ و خالی بنه پرت بدوژه وه ئه گهر زانیت $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

له راهیئانی 1 تا 4، ماوهکانی پوو لهزیادبوون و پوو له کهمبوون دیاریبکه.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \quad 2$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 4$$

$$f(x) = xe^x \quad 3$$

له راهیئانی 5 تا 8 ئەمانه بدۆزهوه: (أ) بهها شلوقةكان (ب) ماوهکانی پوو لهزیادبوون و کهمبوون (ج) تاقیکردنهوهی داتاشراوی یهکهه بهکاربهیتنه بۆ دۆزینهوهی بههایهکانی ئەوپهپری خۆجییهتی (د) پوونکردنهوهی نهخشهکه بۆ پاسه دانکردنی راستی وهلامهکهت بکیشه.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \quad 6$$

$$f(x) = x^2 + 4x \quad 5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad 8$$

$$f(x) = -4x + \frac{4}{x} \quad 7$$

له راهیئانی 9 تا 12، هه مان داواکارییهکانی پرسیارهکانی پيشوو له ماوهی $[0, 2\pi]$ جییهجییه.

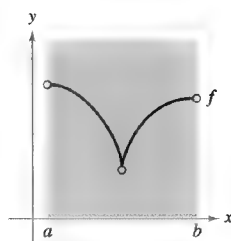
$$f(x) = \sin 2x \quad 10$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x \quad 9$$

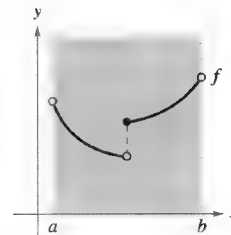
$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \quad 12$$

$$f(x) = x^2 + \cos x \quad 11$$

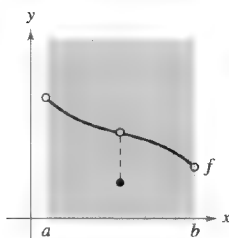
له راهیئانی 13 تا 16، دیاریبکه ئەگەر نهخشهکه بههای بچووکترین خۆجی له ماوهی $[a, b]$ ههیه بهپیی پوونکردنهوهکی لهو ماوهیهدا.



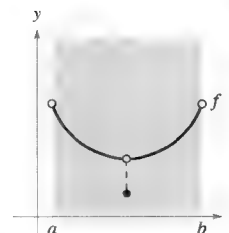
14



13

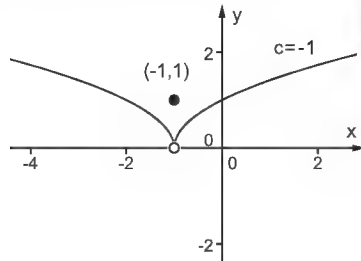


16

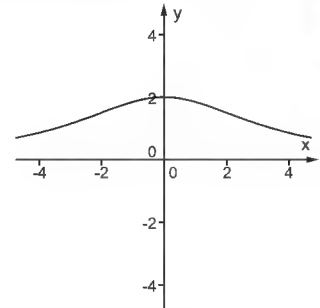


15

له راهيئنانى 1 و 2 دا، ماوه كراوهكان بدۆزهوه كاتيگ پرونكرندنهوى نهخشهكه قوڤز يا قوڤاو بىت.



2



1

له راهيئنانى 3 تا 6، خالهكانى وەرگهپان (ئەگەر هەبىت)، بدۆزهوه، ناوچهكانى قوڤز و قوڤاوى پرونكرندنهوى نهخشهكه بدۆزهوه.

$$f(x) = x\sqrt{x+1} \quad 4$$

$$f(x) = 2x^4 - 8x + 3 \quad 3$$

$$f(x) = xe^x \quad 6$$

لهماوهى $[0, 2\pi]$

$$f(x) = x - \cos x \quad 5$$

له راهيئنانى 7 تا 10، بههاى ئهوپهپى (گهوارهترين و بچووكترين) كوتايى خوڤييهتى بدۆزهوه به بهكارهيننانى داتاشراوى دووهم ئەگەر كرا.

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)^2 \quad 8$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \quad 7$$

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x \quad 10$$

$$f(x) = x \ln x \quad 9$$

له راهيئنانى 11 و 12، ويتهى پرونكرندنهوى نهخشهكه بكيشه كه پاسهدانى مهرجه ديارىكراوهكان دهكات

$$f(0) = f(2) = 0 \quad 12$$

$$f(0) = f(2) = 0 \quad 11$$

$$f'(x) < 0 \text{ لهماوهى } x < 1$$

$$f'(x) > 0 \text{ لهماوهى } x < 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ لهماوهى } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \text{ لهماوهى } x > 1$$

$$f''(x) > 0$$

$$f''(x) < 0$$

13 نهخشه $C(x) = 2x + \frac{320000}{x}$ نموونهيهك بۆ ههژماركردى تىچوونى كرين و داكردى x يهكه له بهرههميكي ديارىكراو پيكدەهيئيت چەند يهكه له x پيويسته بكرديت و دابكریت بۆ ئەوهى تىچوون كهترين بىت.

14 نهخشه $S = \frac{100t^2}{65+t^2}$ كاتيگ $t > 0$ نموونهيهك پيكدەهيئيت بۆ ديارىكردى خيىرايى چاپكهريگ لهسەر ئامپىرى چاپ (به ژمارهى وشەكان له خولهكيگ) بهپيى ژمارهى ههفتهكان t پاش راهيئنانكردى.

ب) ئايا خيىرايى كهسهكه به بهردهوامى زياد دهكات كاتيگ بههاى t زيادبىت؟ پرونيكهوه.

ا) نيشانهى داتاشراوى يهكهم چيهه كاتيگ t موجهب بىت؟

له راهيئنانى 1 تا 6، ئامانجى داواكراو بدۆزهوه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x+1} \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 5x}{x} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+2 \cos x} \quad 4$$

له راهيئنانى 7 تا 12، پروونكر دهنه وهى نه خشه كه بكيشه به بهكارهيئنانى بهاى ئهويه پى خوجيئتى و يه كتر برينه كان له گه ل دوو ته وهى پوتانه كان و هاوجيئوون و دهركه ناره كان،

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-16} \quad 9$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad 8$$

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x} \quad 7$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \quad 12$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad 11$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \quad 10$$

13 راسته هيليك لارييه كهى m بيت و به خالى (0, -2) دا ده پوات.

ا به پى m دوورى d(m) له نيوان خالى (2, 4) و ئه و راسته هيليك بدۆزه وه.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(m)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(m)$ بدۆزه وه.

له راهیڤنانی 1 تا 6، وێنه پوونکردنهوهی نهخشهکه بکێشه.

3 $f(x) = (x-1)^5$

2 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

1 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

6 $f(x) = x^5 - 5x$

5 $f(x) = |2x-5|$

4 $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$

له راهیڤنانی 7 تا 9، وێنه پوونکردنهوهی نهخشهکه بکێشه.

7 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ له ماوهی $[0, 2\pi]$

8 $f(x) = 2x - \tan x$ له ماوهی $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ له ماوهی $]0, \frac{\pi}{2}[$

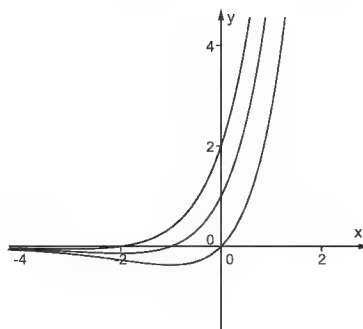
له راهیڤنانی 10 تا 12، نهخشهیهك بدۆزهوه، پاسادانی مهرجهکانی پرسیارهکه بکات.

10 نهخشهکه هێلێکی دهركه ناری ستوونی $x=1$ و دهركه ناری ئاسۆیی $y=3$ ههیه.

11 نهخشهکه هێلێکی دهركه ناری ستوونی $x=-2$ و دهركه ناری لاری $y=-x+1$ ههیه.

12 نهخشهکه هێلێکی دهركه ناری ستوونی $x=1$ و دهركه ناری لاری $y=2x+3$ ههیه.

13 له وێنهکه پوونکردنهوهکانی نهخشهی f و داتاشاروهکی یه کهم f' و دووهم f'' دهردکهوێت. پوونکردنهوهکانی نهخشهی f و f' و f'' جیا بکهوه.



14 $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - ax$ کاتیك $a \neq 0$

[i] له هه مان پروتهختی پۆتانهکان، پوونکردنهوهکانی نهخشهکه بۆ چوار به های جیاوازی a بکێشه.

[ب] دیاریبکه، ئه گهر گۆرانی به های a ، یه کتر برپینهکانی پوونکردنهوه کهو به های ئه و په پری قۆپاوی یان قۆقزی نهخشهکه دهگۆرێت.

1 دوو ژماره بدوژوهه، سرجه میان 120 بیت و ئه نجامی لیکدانیان گه ورتین بیت.

2 دوو ژماره ی موجب بدوژوهه، په کیکیان هله ګه پراوه ی ئه و ی تریان بیت و سرجه میان بچو وکتین بیت.

3 دوو ژماره ی موجب بدوژوهه، سرجه می دوو جای هردو وکیان دهکاته 72، ئه نجامی لیکدانیان گه ورتین بیت.

4 دریژی و پانی لاکیشیه که بدوژوهه بو ئه و ی پرویه ره که ی گه ورتین بیت، ئه گه ر زانیت چپوه که ی 120m له.

له راهیټنای 5 و 6 دا، خالیکی پوونکرده و ی نه خشه دراوه که بدوژوهه که نزیکترین خال بیت له خاله دراوه که.

$$5 \quad f(x) = x^2; \left(2, \frac{1}{2}\right) \quad 6 \quad f(x) = \sqrt{x+8}; (2, 0)$$

7 بچو وکتین پرویه ر: سرجه می چپوه ی سیګوشیه کی پک (لایه کسان) و چوارګوشیه که 10m، دریژی

هه ریه که له لایه کی سیګوشیه که و لایه کی چوارګوشیه که بدوژوهه بو ئه و ی سرجه می دوو پرویه ره که بچو وکتین بیت.

8 گه ورتین پرویه ر: دریژی و پانی گه ورتین لاکیشیه بدوژوهه، که ده توانیټ له ناو نیو بازنده ا

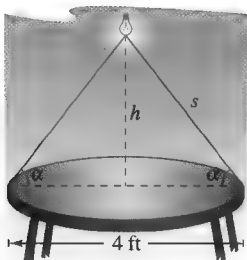
بکیشریټ، نیوه تیره که ی r بیت.

9 ته لیک کی کانزایی دریژییه که ی 30 m و ده ته ویت دوو وینه ی (شیوه ی) پی دروست بکه یت، پیویسته چهند له و

ته له بو هه ر وینه یه که به کار به ینیت ئه گه ر زانیت پرویه ری گشتی ده و ره دراو گه ورتین بیت. باسی ئه م بارانه ی خواره وه بکه کاتی که دوو وینه که:

ا سیګوشیه کی پک و چوارګوشه بیت.

ب چوارګوشه و بازنه بیت.



10 پوښنایی، ګلویک ده که وینه سه ر میژیکی بازنه یی که نیوه تیره که ی 4 پییه. تیشکی I که له

پووناکییه وه ده رده چیت به یاسای $I = \frac{k \sin \alpha}{r^2}$ دریژ ده بیته وه کاتی که k به هایه که ی نه گوره و s

دریژی تیشکه که یه له سه رچاوه ی پووناکییه که بو لایه کی میزه که، و α ئه و ګوشیه که

تیشکه که له گهل ئاستی میزه که پیکده ینیت. به های h بدوژوهه که واده کات تیشکه که

گه ورتین بیت.

له راهینانی 1 و 2 دا، بهبهکارهینانی داتاشراو له راستی تهواوکارییهکه دلتیا به.

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + c \quad 1$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c \quad 2$$

3 نهخشه $f(x)$ بدۆزهوه ئهگهر زانیت $f'(x) = 2 - 3x^2$ و پروونکردنهوهی نهخشه f به خالی $(-1, 3)$ دا دهپوات.

له راهینانی 4 تا 10، تهواوکاری بیسنوور بدۆزهوه:

$$\int (2x^3 - 3 \sin x) dx \quad 4$$

$$\int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx \quad 5$$

$$\int \frac{2-3\cos x}{4} dx \quad 6$$

$$\int \frac{dx}{3x\sqrt{x}} \quad 7$$

$$\int \frac{4x^4 - 1}{x^2} dx \quad 8$$

$$\int (x-2)(x+2)(x^2+4) dx \quad 9$$

$$\int \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}} dx \quad 10$$

11 له وینهی بهرامبه پروونکردنهوهی داتاشراوی نهخشه f

دهردهکهویت، وینهکه بهکاربهینه بو وهلامدانهوهی ئهه پرسیارانهی

خوارهوه کاتیک $f(1) = 0$.

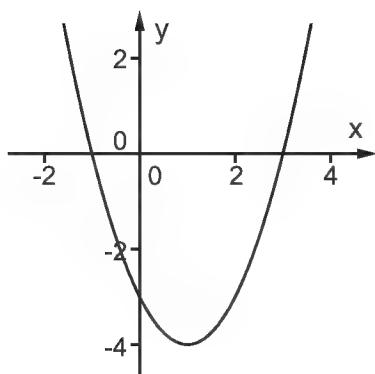
ا لاری نهخشه f له خالی $x = 0$ بدۆزهوه.

ب هاوکیشهی لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشه f له $x = 1$ بدۆزهوه.

ج بهراورد له نیوان $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ بکه.

د ئهگهر $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ هاوکیشهی f' بیت تهوا $f(x)$

به پپی x بدۆزهوه.



12 ئۆتۆمبیلێک به تاودانیکی نهگۆپ برهکهی 3 m/s^2 بو برینی دووری 150 m به پیکهوت.

ا ئۆتۆمبیلکه بو برینی ئهه دوورییه چهند کاتی پیویسته؟

ب خیراییهکهی لهکاتی گهیشتن دهبیته چهند؟

له پاهینانی 1 تا 4، ههژماری تهواوکارییه سنووردارهکه بکه.

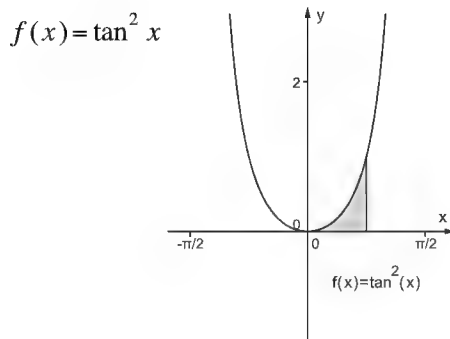
$$\int_0^1 (x-2)(x+1) dx \quad 1 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+3\cos x) dx \quad 2$$

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad 3 \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+|\sin x|) dx \quad 4$$

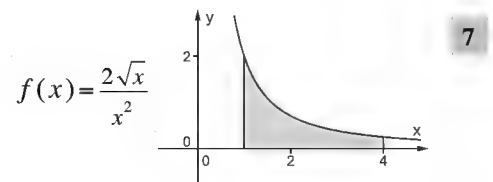
له پاهینانی 5 و 6 دا، وینهی ئهوا ناوچهیه بکیشه که پوویهرهکی دهکاته تهواوکارییه سنووردراودهکه، پاشان ئهوهی له یاساکی ههژمارکردنی پوویهر له ئهنازه دهیزانیته بهکاریهینه بو دۆزینهوهی بههای تهواوکارییهکه.

$$\int_{-2}^2 (1+|x|) dx \quad 5 \quad \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad 6$$

له پاهینانی 7 و 8 دا، پوویهری ناوچه سیبههرکراودهکه ههژمار بکه.



8



7

9 ئهگه $\int_1^5 f(x) dx = 3$ و $\int_1^3 f(x) dx = 5$ بههای ئهمانهی دین بدۆزهوه.

$$\int_3^5 (x+2f(x)) dx \quad \boxed{\text{ب}} \quad \int_1^3 \frac{x^2 f(x)-1}{x^2} dx \quad \boxed{\text{ا}}$$

10 پوویهری ناوچهی سنووردراو به پوونکردنهوهی نهخشه $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ تهوهی x و ههردوو راستههیلی $x=1$ ، $x=4$ بدۆزهوه.

11 ناوهنده بههای نهخشه $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ له ماوهی $[1, 4]$ بدۆزهوه.

12 وادابنی نهخشه $M(x) = 3x^2 - 36x + 105$ تیچوونی پهراویزی به ههزاران دینار بو بهرههمهینانی x یهکه بو یهکیک له بهرههمهکان دهوینیت ($0 \leq x \leq 8$).

ا) ئهوا نهخشهیه بدۆزهوه که تیچوونی گشتی $C(x)$ دهوینیت، ئهگه زانیت تیچوونی نهگۆر دهکاته له 56000 دینار.

ب) تیچوونی گشتی بهرههمهینانی 6 یهکه بدۆزهوه.

لە راھبەتنامە 1 تا 4، تەواوکاری داواکراو بدۆزەوه.

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx \quad 1 \quad \int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad 2$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3e}{2}} \ln\left(\frac{2x}{3}\right) dx \quad 3 \quad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad 4$$

5 [أ] بۆ دۆزینەوهی $\int \ln x dx$ تەواوکاری بەشەشکردن بەکاربهێنە.

[ب] نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی $f(x) = \ln^2 x$ بدۆزەوه کە پوونکردنەوهکە بە خاڵی (1, 1) دا دەپروات.

6 تەواوکاری $\int x \sqrt{x+3} dx$ بدۆزەوه بەبەکارهێنانی:

[أ] لەجیاتی گۆراوەکە $u = x+3$ دا بنی.

[ب] تەواوکاری بە بەشەشکردن لەگەڵ $dv = \sqrt{x+3}$.

لە راھبەتنامە 7 و 8 دا، بەبەکارهێنانی تەواوکاری بە بەشەشکردن زیاتر لە جارێک تەواوکاری داواکراو بدۆزەوه.

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx \quad 7$$

$$\int e^{-x} \cos 2x dx \quad 8$$

لە راھبەتنامە 9 و 10، پووبەری سنووردراو بە پوونکردنەوهی $f(x)$ و تەوهری x و دوو راستەهێلی $x=a$ و $x=b$ بدۆزەوه.

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \quad a=0, \quad b=1 \quad 9$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \quad a=0, \quad b=\ln 2 \quad 10$$

11 تەواوکاری $\int e^{\sqrt{x}} dx$ بدۆزەوه

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad 12$$

[أ] I_n بدۆزەوه کاتی $n=0$ و $n=1$.

[ب] تەواوکاری بە بەشەشکردن بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

[ج] بەهای I_3 دەرئەنجام بکە.

له پراييتناني 1 تا 4، پووبهري ئهواوچهيه بدۆزهوه كه به نهخشهي $f(x)$ و تهوهري x له لايهك و ههردوو راستههيئي $x=a$ و $x=b$ له لايهكي تر سنووردراوه.

3 $b = \frac{\pi}{2}, a = 0, f(x) = x \cos 2x$

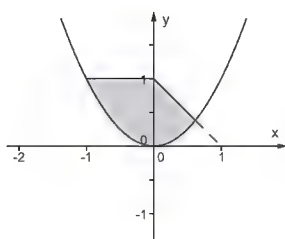
1 $b = 3, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2$

4 $b = \ln 2, a = -\ln 2, f(x) = e^x - e^{-x}$

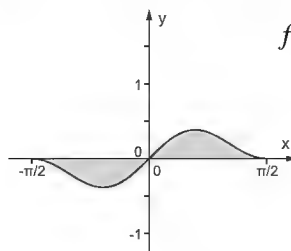
2 $b = e, a = \frac{1}{e}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$

5 تهواوكاري بهكاربهينه بۆ ههژماركردي پووبهري بازنهيهك، چهقهكه (0, 0) و به خالي (4, 3) دا دهپوات.

له پراييتناني 6 و 7 دا، پووبهري ناوچهي سيپهركراو ههژماريكة.



7 $f(x) = x^2$



6 $f(x) = \sin x \cos^2 x$

8 $f(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

1 تهواوكاري به بهشبهشكردي بهكاربهينه بۆ ههژماركردي پووبهري سنووردراوي نيوان پوونكرديهوي نهخشهي $f(x)$ و تهوهري x و ههردوو دوو راستههيئي $x=1$ و $x=e$.

2 قهبارهي ئهوا تهنهي پيدا دهبيت له نهجامي سوپانهوهي ناوچهي سنووردراوي لقي A به دهوري تهوهري x بدۆزهوه

له پراييتناني 9 و 10، قهبارهي ئهوا تهنهي پيدا دهبيت له نهجامي سوپانهوهي ناوچهي سنووردراو به پوونكرديهوي هاوكيشهكه به دهوري تهوهري x بدۆزهوه.

10 $x = 2, y = 1, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

9 $x = \ln 2, y = 0, f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

له پراييتناني 11 و 12، خالهكاني يهكتربريني پوونكرديهوي دوو نهخشهكه بدۆزهوه، پاشان پووبهري ئهوا ناوچهيه بدۆزهوه كه سنووريان داوه.

11 $g(x) = x - 1, f(x) = xe^{-x} - e^{-x}$

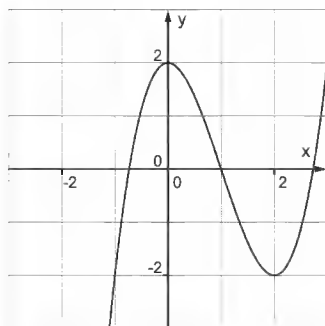
12 $g(x) = x^2, f(x) = x^4 - 2x^2$

13 ويتهي بهرامبهري پوونكرديهوي نهخشهي بنهپهتي f ي نهخشهي $f(x)$ دهركهكه ويته

1 $\int_{-1}^3 f(x) dx$ ههژماريكة

2 $\int_{-1}^3 f(x) dx$ نايان نهخشهي $f(x)$ له ماوهي [2, 3] موجهه يان سالبه؟

3 پووبهري ناوچهي سنووردراو به پوونكرديهوي نهخشهي $f(x)$ ، تهوهري x و ههردوو دوو راستههيئي $x=0$ و $x=3$ ههژماريكة.



تیشکۆ و سەرو دەلیل و تەوهری برگه هاوتایه که بدۆزهوه، پاشان وینەى برگه هاوتایه که له پووتهختی پۆوتانهکان بکێشه.

$$x = -2y^2 \quad 1$$

$$x^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \quad 2$$

هاوکێشهى برگه هاوتایه که بدۆزهوه.

$$3 \quad \text{سەر } (0, -1), \text{ تیشکۆ } (0, -2)$$

$$4 \quad \text{سەر } (-3, 1), \text{ دەلیل } x = -6$$

چەق و هەردوو تیشکۆ و تەوهری گەورەو بچووکی برگه ناتەواوه که بدۆزهوه، پاشان وینەى برگه که بکێشه.

$$5 \quad x^2 + 9y^2 = 1$$

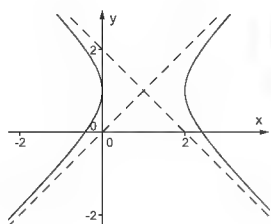
$$6 \quad 9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$$

چەق و هەردوو تیشکۆ و تەوهری گەورەو بچووکی برگه زیاده که بدۆزهوه، پاشان وینەى برگه که بکێشه.

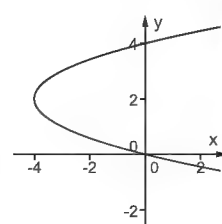
$$7 \quad 4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$8 \quad y^2 - 4x^2 + 2y - 8x - 7 = 0$$

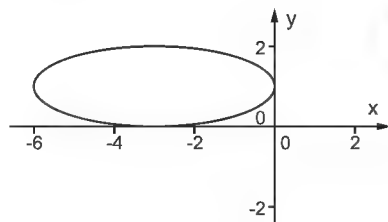
هاوکێشهى برگه قوچه کیه که بدۆزهوه.



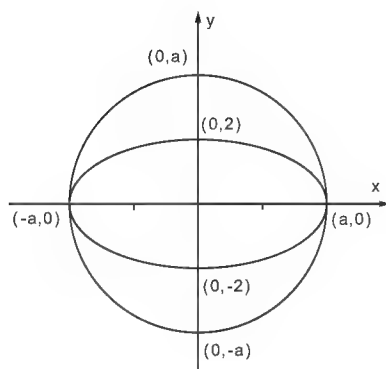
10



9



11



12 هاوکێشهى ئەو برگه ناتەواوه بدۆزهوه که له وینەى بەرامبەر دەرەکهوێت، ئەگەر زانیت پووبەرەکهى نیوهى پووبەرى بازەکهیه له هەمان وینەدا.

13 له پووتهختی پۆوتاندا، پوونکردنەوهى هاوکێشهى $x^2 + 4y|y| - 16 = 0$ بکێشه.

14 هاوکێشهى ئەو برگه زیاده بدۆزهوه که سەرەکانى دکهونه سەر $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ و دەرکەنارەکانى بریتین له $y = 3x$ و $y = -3x$.

15 هاوکێشهى ئەو برگه زیاده بدۆزهوه ئەگەر زانیت چەقەکهى $(0, 0)$ و یهکێک له سەرەکانى خالى $(0, 2)$ و یهکێک له تیشکۆیهکانى خالى $(0, 4)$ بێت.

پۆلینکردنی برڤه قوچه کیهکان Classifying Conics

1 جیاوازی چهقی برڤه ناتهواوی $4x^2 + 3y^2 = 12$ لهگهڵ دوو تیشکۆ و دوو دهلیلهکهی بدۆزهوه.

2 هاوکیشهی برڤه ناتهواویک بدۆزهوه چهقهکهی $(2, 1)$ و تیشکۆیهکهی $(4, 1)$ و دهلیلهکهی $x = 6$ بیټ.

3 هاوکیشهی برڤه ناتهواویک بدۆزهوه چهقهکهی $(0, 0)$ و تیشکۆیهکهی $(2, 0)$ و سهرهکهی $(3, 0)$ بیټ.

4 پۆوتانی سهرهکانی برڤه ناتهواویک بدۆزهوه که جیاوازی چهقهکهی $\frac{2}{3}$ تیشکۆکانی $(0, \pm 3)$ بیټ.

5 جیاوازی چهقی برڤه زیادی $x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ لهگهڵ دوو تیشکۆ و دوو دهلیلهکهی بدۆزهوه.

له راهیئانی 6 و 7 دا، هاوکیشهی برڤه زیاد به زانینی پیکهیتنه رهکانی که دراوه بدۆزهوه.

6 جیاوازی چهقی: 2، سهرهکان $(\pm 2, 0)$

7 جیاوازی چهقی: 3، تیشکۆیهکان $(0, 0)$ و $(0, 4)$.

8 جیاوازی چهقی برڤه زیادی $x^2 - y^2 = a^2$ کاتیکی $(a \neq 0)$ بدۆزهوه ههردوو تیشکۆ و دهلیل و دهرکه نارهکانی بدۆزهوه.

9 جیاوازی چهقی برڤه زیادیک بدۆزهوه که سهرهکانی $(\pm 2, 0)$ بیټ و به خالی $(3, \frac{5}{2})$ دا دهروات.

10 جیاوازی چهقی برڤه ناتهواویک بدۆزهوه که کۆمهلهی ههموو ئه و خالانه پیکدههینن له پووتهختیکدا، که سههرجهمی دوو دووریان له دوو خالی $(1, 0)$ و $(4, 0)$ بههایهکی نهگۆرپه دهکاته 6.

11 جیاوازی چهقی خولگهی ههسارهی مهريخ به نزیکي دهکاته 0.09، پێژهی دريژی ئه و خولگه بۆ پانییهکهی بدۆزهوه.

12 پوونیبهکهوه، هاوکیشهی برڤه ناتهواو بهم شیویه دهنووسریت:

$$e \text{ دهکاته جیاوازی چهقی برڤه ناتهواوه که } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

13 راهیئانی پیشو به کاربهینه بۆ ئه وهی پوونیبهکه یته وه که ئامانجی برڤه ناتهواو بریتیه له بازنه، کاتیکی e نزیکدهبیته وه له 0.

راهيئنان

وانه

3-6

Quadratic Equations in 2 Variables هاوكيشه دووجايهكان به دوو گوڤاو

تافيكرندنهوهي جياكه رهوه بهكاربهينه بو دياريكردني جوړي نهو چه ماوهي كه هاوكيشهكه دنويئت.

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 10 = 0 \quad 2$$

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0 \quad 1$$

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \quad 4$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4 - 3 = 0 \quad 3$$

دوو تهوهري پووتانهكاني بسورپينهوه بو نهوهي له رادهي يهكترپرين پزگارييت، پاشان جوړي نواندني روونكردنهوهي هاوكيشهكه دياريبكه.

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0 \quad 6$$

$$2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0 \quad 5$$

$$xy + y + 1 = x \quad 8$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 5 \quad 7$$

9 ساين و كوځسايني نهو گوځشهيهي تهوهري پووتانهكان پي دسورپينهوه بدوزهوه بو نهوهي له رادهي يهكتر پريني هاوكيشهكه $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ پزگارييت (بهبي بهكارهيناني سورانهوه).

10 كاريگهري سوراني تهوهري پووتانهكان به 90° به دهوري خالي بنهپرت له هاوكيشهكه هه برپگهيهكي قووچهكي چييه؟ هاوكيشهكه برپگهكه له پروتختي پوتانه نوييهكه بدوزهوه.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگه ي ناتهواو} \quad \text{ا}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگه ي زياد} \quad \text{ب}$$

$$y^2 = 4px: \text{برپگه ي هاوتا} \quad \text{ج}$$

11 جياوازي چهقي برپگه ي زيادي $xy = 4$ بدوزهوه.

12 به فهراموشكردني بارهكاني لهباربردن، بههاكاني ژماره ي راستي m بدوزهوه. كهوا له هاوكيشهكه $x^2 + mxy + my^2 - y - 1 = 0$ دهكات ببينه:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگه ي ناتهواو} \quad \text{ا}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگه ي زياد} \quad \text{ب}$$

$$y^2 = 4px: \text{برپگه ي هاوتا} \quad \text{ج}$$

13 جوړي نهو چه ماوه كه هاوكيشهكه $xy - x^2 - x - 1 = 0$ دنويئت چييه؟

ب بو كيشاني روونكردنهوهي هاوكيشهكه نهخشه پيژهييهكان بهكاربهينه.

1 ئهم ژماره ئاويتتانهئى دىن به شيوهئى جهبى بنوسه:

$$(1-2i)^3 \quad \text{ب} \quad \frac{(2-i)(2+i)}{1+i} \quad \text{ج} \quad 1+i+i^2+i^3+\dots+i^{20}$$

2 ئهم ژماره ئاويتتانهئى دىن به شيوهئى سيگوشهئى و جهمسهرى بنوسه:

$$z_1 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{ب} \quad z_2 = \sqrt{6}-i\sqrt{2} \quad \text{ج} \quad z_3 = \bar{z}_1 \times z_2^3$$

3 شيوهئى جهمسهرى ژمارهئى ئاويتتهئى z ئهمهيه $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ا شيوهئى جهمسهرى بۆ ههرهكه لهم ژماره ئاويتتانه $z_1 = \frac{1}{\bar{z}^2}$ و $z_2 = z + iz$ بدۆزهوه.

ب بههائى ههرهكه له $|iz^2|$ و $|\frac{1+2i}{iz}|$ بدۆزهوه.

ج بههائى ههرهكه له $\arg(-5z)$ و $\arg(\frac{-2i}{\bar{z}^5})$ بدۆزهوه.

د بههاكانى ژمارهئى سرووشتى n بدۆزهوه كه z^n ژمارههكى راستى ناسالب نهبيت.

4 شيوهئى جهمسهرى بۆ ژمارهئى ئاويتتهئى $z = \sin(2\theta) - i\cos(2\theta)$ بنوسه.

5 ا بهشيوهئى جهبى ژمارهئى ئاويتته z^2 بنوسه كاتيک $z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$

ب بههائى پروتى ژمارهئى ئاويتته z و گوشه جهمسهرهكهئى بدۆزهوه.

ج بههائى پیک بۆ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ بدۆزهوه.

6 بيسهلمينه كه $|\frac{iz+1}{\bar{z}+i}| = 1$ كاتيک $z \neq i$.

7 M و N و P سى خالى جياوازن $z_M = 2e^{i\theta}$, $z_N = \bar{z}_M$, $z_P = 2e^{3i\theta}$ بيسهلمينه كه $MN = MP$.

8 شيوهئى جهمسهرى ئهم ژماره ئاويتتانهئى دىن بدۆزهوه:

$$z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12} \quad \text{ا} \quad z = \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20} \quad \text{ب}$$

9 شيوهئى جهمسهرى ئهم ژمارهيه $z = \left(\sin \frac{\theta}{2} + i\cos \frac{\theta}{2}\right)^{10}$ بنوسه.

10 ا به شيوهئى جهمسهرى، پهگهكانى 1 له په 5 بنوسه.

ب سهرجهمى ئهو پهگانه چهندن؟

11 به شيوهئى جهبى ژماره ئاويتتهئى z كه دوو مهرجى: $|z-1| = \sqrt{5}$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ جيپهجي دهكات بدۆزهوه.

12 بيسهلمينه كه $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

له راهيئانی 1 تا 4، ژماره ئاویتته بۆ شیوهی خالی m به جیگۆرکی دیاریکراو بنووسه.

1 $M(3, 4)$ ، راکیشانی ئاراسته بپهکهی $\vec{u}(-2, 1)$. 2 $M(1, 2 - \sqrt{3})$ وینه دانه وه به دهوری تهوهره ی x .

3 $M(\sqrt{2}, -1)$ ، به هاوپیژهی ئەندازه یی چهقه که ی خالی بنه پت و پیژه که ی $\sqrt{2}$.

4 $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، سوپانه وه به دهوری خالی بنه پت گوشه که ی $\frac{\pi}{6}$.

5 M خالی ژماره ی ئاویتته ی z ه کاتیك $z \neq \pm 1$ و $z \neq \pm i$ کۆمه له ی خاله کانی M بدۆزه وه بۆ ئه وه ی ههردوو راسته هیللی PQ و PR ئهستوون بن، ئه گه ر زانیت $z_P = 1$ ، $z_Q = z^2$ ، $z_R = z^4$.

6 A, B, P, D چوار خال له پروته ختی پۆتاندا کاتیك $z_A = 2$ ، $z_B = i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i$.

ا) بیهه لمینه که $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 2k\pi$ له باره ی ههردوو راسته هیللی AB و CD چ ده رنه جامیك ده بییت؟

ب) $|z_B - z_C|$ و $|z_A - z_D|$ بدۆزه وه.

ج) جوړی چوارلای $ADCB$ چیه؟

7 بیهه لمینه سیگۆشه ی PQR سیگۆشه یه کی پیکه، کاتیك $z_P = -2$ ، $z_Q = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_R = 1 - i\sqrt{3}$.